

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta$$

β) Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f , που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f , που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 , και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ε) Έστω $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα διάφορα του μηδενικού. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < 0 < \beta$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .

Αν ισχύει $f(\alpha) = 5\beta$ και $f(\beta) = 5\alpha$, να αποδείξετε ότι:

B1. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

Μονάδες 10

B2. Υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης C_f της f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - 5y + 2010 = 0$

Μονάδες 10

B3. Η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{5}{2}(\alpha + \beta)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - 6z + \gamma = 0$ με $\gamma \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 με $\text{Im}(z_1) > 0$ και $|z_1| = 5$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\gamma = 25$.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $\gamma = 25$, να βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Μονάδες 5

Γ3. Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w - z_1| = |w - z_2|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+3)\sqrt{9-x^2}$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο της f :

α. στο ανοικτό διάστημα $(-3, 3)$ (Μονάδες 3)

β. στο σημείο $x_0 = -3$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Μονάδες 9

Δ4. Να βρείτε τα ακρότατα της f .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των θεμάτων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ