

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Για οποιουδήποτε μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$ , να αποδείξετε ότι

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις  $f, g$  είναι ίσες;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η εξίσωση  $|z - z_0| = \rho$ ,  $\rho > 0$  παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho$ , όπου  $z, z_0$  μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

**β)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

(μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

γ) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε πάντοτε ισχύει  $f \circ g = g \circ f$

(μονάδες 2)

δ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ , όπου  $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$  και  $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$

(μονάδες 2)

ε)  $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x, \quad x \in \mathbb{R}$

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \frac{2z - i}{2z + i}, \quad z \neq -\frac{i}{2}$

- $w$  φανταστικός

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ , είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = \frac{1}{2}$ , εκτός από το σημείο  $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  του κύκλου.

**Μονάδες 10**

**B2.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , του ερωτήματος B1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει  $|w| = 1$

**Μονάδες 8**

**B3.** Αν είναι  $z = \frac{1}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι

$$w^4 + i w^7 = 0$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^3 + x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- Γ1.** Να υπολογίσετε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε η ευθεία  $\varepsilon: y = 4x - 2$  να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  **Μονάδες 7**

**Στη συνέχεια, για  $\alpha = 1$**

- Γ2.** i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  (μονάδες 4)  
ii) Να λύσετε στο  $\mathbb{R}$  την παρακάτω ανίσωση (μονάδες 6)

$$f(x^3 + x) > 10$$

**Μονάδες 10**

- Γ3.** Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x^2 + 1} \eta \mu \frac{1}{x} \right)$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν:

- $f(x) + x f'(x) = 2x$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = 10$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

**Μονάδες 6**

- Δ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 6**

- Δ3.** Να μελετήσετε, ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f'$

**Μονάδες 5**

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) - 10 \leq (x - 1) f'(x), \quad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty)$$

**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**